EGMO 2025
European Girls' Mathematical Olympiad
KOSOVA

Language: **Slovenian**

Day: 2

ponedeljek, 14. april 2025

Naloga 4. Naj bo ABC ostrokotni trikotnik s središčem včrtane krožnice v točki I, za katerega velja $|AB| \neq |AC|$. Naj premici BI in CI sekata očrtano krožnico trikotnika ABC zaporedoma v točkah $P \neq B$ in $Q \neq C$. Naj bosta R in S takšni točki, da sta $AQRB$ in $ACSP$ paralelograma (kjer $AQ \parallel RB$, $AB \parallel QR$, $AC \parallel SP$ in $AP \parallel CS$). Naj bo točka T presečišče premic RB in SC. Dokaži, da so točke R, S, T in I koncikliče.

Naloga 5. Naj bo $n > 1$ naravno število. Pri *konfiguraciji* plošče velikosti $n \times n$ vsako izmed n^2 polj vsebuje puščico, ki kaže gor, dol, levo ali desno. Pri dani začetni konfiguraciji polž Turbo začne v enem izmed polj in se premika iz polja v polje. Pri vsakem premiku se Turbo premakne eno dolžinsko enoto (enako dolžini stranice polja) v smeri, določeni s puščico na polju, kjer se Turbo trenutno nahaja (po možnosti se pri tem premakne izven plošče). Po vsakem premiku se puščice v vseh poljih zavrtijo za 90° v nasprotni smeri urinega kazalca. Pravimo, da je polje *imenitno*, če Turbo ob začetku v tem polju vsako polje plošče obišče natanko enkrat in se na koncu vrne v začetno polje, brez da bi zapustil ploščo. V odvisnosti od n poišči največje možno število imenitnih polj, ki so lahko na plošči.

Naloga 6. V vsakem polju razpredelnice velikosti 2025×2025 je napisano nenegativno realno število, tako da je vsota števil v vsaki vrstici enaka 1 in da je vsota števil v vsakem stolpcu enaka 1. Naj bo r_i največje število v vrstici i in naj bo $R = r_1 + r_2 + \cdots + r_{2025}$. Podobno naj bo c_i največje število v stolpcu i in naj bo $C = c_1 + c_2 + \cdots + c_{2025}$.
Poišči največjo možno vrednost izraza $\frac{R}{C}$.

Čas pisanja: 4 ure in 30 minut
Vsaka naloga je vredna 7 točk.