Poniedziałek, 14 kwietnia 2025

Zadanie 4. Niech ABC będzie trójkątem ostrokątnym, w którym $AB \neq AC$. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Proste BI oraz CI przecinają okrąg opisany na ABC odpowiednio w punktach $P \neq B$ oraz $Q \neq C$. Rozważmy punkty R i S takie że $AQRB$ i $ACSP$ są równoległobokami (gdzie $AQ \parallel RB$, $AB \parallel QR$, $AC \parallel SP$ i $AP \parallel CS$). Niech T będzie punktem przecięcia prostych RB i SC. Udowodnić, że punkty R, S, T, oraz I leżą na jednym okręgu.

Zadanie 5. Niech $n > 1$ będzie liczbą całkowitą. *Konfiguracją* planszy $n \times n$ nazywamy przypisanie do każdego z n^2 pól planszy jednej strzałki wskazującej w górę, w dół, w prawo lub w lewo. Dla danej konfiguracji startowej ślimaczyca Turbina startuje w pewnym polu planszy i przemieszcza się z pola na pole. W każdym ruchu Turbina przemieszcza się o jedno pole w kierunku wskazywanym przez strzałkę znajdującą się na polu na którym stoi (być może opuszczając planszę). Po każdym ruchu wszystkie strzałki znajdujące się na planszy obracają się o 90° przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Pole nazywamy *dobrym* jeżeli startując z tego pola Turbina odwiedza każde pole planszy dokładnie raz i na koniec wraca do pola startowego. Wyznaczyć, w zależności od n, maksymalną liczbę dobrych pól spośród wszystkich możliwych konfiguracji startowych.

Zadanie 6. W każdym polu planszy 2025×2025 wpisana jest liczba rzeczywista nieujemna w taki sposób, że suma liczb w każdym rzędzie jest równa 1 oraz suma liczb w każdej kolumnie jest równa 1. Zdefiniujmy r_i jako największą liczbą w rzędzie i oraz $R = r_1 + r_2 + \cdots + r_{2025}$. Podobnie, zdefiniujmy c_i jako największą liczbę w kolumnie i oraz $C = c_1 + c_2 + \cdots + c_{2025}$.
Jaka jest największa możliwa wartość $\frac{R}{C}$?

Czas pracy: 4 godziny i 30 minut
Za każde zadanie można otrzymać 7 punktów