EGMO 2025
European Girls' Mathematical Olympiad
KOSOVA

Language: **Japanese**

Day: 2

2025 年 4 月 14 日 月曜日

問題 4.　$AB \neq AC$ をみたす鋭角三角形 ABC の内心を I とする．三角形 ABC の外接円と直線 BI の交点のうち B でない方を P とし, 三角形 ABC の外接円と直線 CI の交点のうち C でない方を Q とする．2 点 R, S を, 四角形 $AQRB$ および $ACSP$ がともに平行四辺形となるようにとる (すなわち, 4 組の 2 直線 AQ と RB, AB と QR, AC と SP, AP と CS がいずれも平行となるようにとる)．直線 RB と SC の交点を T とするとき, 4 点 R, S, T, I は同一円周上にあることを示せ．

問題 5.　n を 1 より大きい整数とする．$n \times n$ のマス目であって, n^2 個のマスそれぞれに上下左右のいずれかを向いた矢印を書き込んだものを**初期配置**とよぶ．かたつむりのターボちゃんは, 初期配置のいずれかのマスから出発し, 以下の規則に従って $n \times n$ のマス目を移動する．

> ターボちゃんは, 現在いるマスに書かれた矢印の方向に 1 マス進む (ただし, $n \times n$ のマス目の外に出ることもある)．その後, すべてのマスに書かれた矢印が反時計回りに 90° 回転する．

初期配置におけるあるマスが**良いマス**であるとは, そのマスから出発してターボちゃんが移動を繰り返すとき, $n \times n$ のマス目の外に一度も出ることなく, すべてのマスを一度ずつ通って元のマスに戻ってくることをいう．ありうるすべての初期配置を考えるとき, 良いマスの個数としてありうる最大の値を n を用いて表せ．

問題 6.　2025×2025 のマス目の各マスに非負実数が書かれており, どの行に書かれた実数の総和も 1 であり, どの列に書かれた実数の総和も 1 である．1 以上 2025 以下の整数 i に対し, 上から i 行目の 2025 マスに書かれた実数のうち最大のものを r_i とし, $R = r_1 + r_2 + \cdots + r_{2025}$ とおく．さらに, 1 以上 2025 以下の整数 i に対し, 左から i 列目の 2025 マスに書かれた実数のうち最大のものを c_i とし, $C = c_1 + c_2 + \cdots + c_{2025}$ とおく．このとき, $\dfrac{R}{C}$ としてありうる最大の値を求めよ．

時間：4 時間 30 分
各問 7 点