EGMO 2025
European Girls' Mathematical Olympiad
KOSOVA

Language: **Italian**

Day: **2**

Lunedì, 14 aprile 2025

Problema 4. Sia ABC un triangolo acutangolo con incentro I ed $AB \neq AC$. Le rette BI e CI intersecano la circonferenza circoscritta ad ABC nei punti $P \neq B$ e $Q \neq C$, rispettivamente. Scegliamo i punti R ed S in modo che $AQRB$ e $ACSP$ siano parallelogrammi (con $AQ \parallel RB$, $AB \parallel QR$, $AC \parallel SP$, ed $AP \parallel CS$). Sia T il punto di intersezione delle rette RB ed SC. Dimostrare che i punti R, S, T, ed I formano un quadrilatero ciclico.

Problema 5. Sia $n > 1$ un intero. In una *configurazione iniziale* di una griglia $n \times n$, ognuna delle n^2 celle contiene una freccia, che punta verso l'alto, verso il basso, verso destra oppure verso sinistra. Fissata una configurazione iniziale, la lumachina Turbo parte da una delle celle della griglia, e si sposta di cella in cella.

Ad ogni mossa, Turbo si muove di un'unità nella direzione indicata dalla freccia della cella in cui si trova (potenzialmente abbandonando la griglia). Dopo ogni mossa, le frecce in ciascuna cella ruotano di 90° in senso antiorario. Chiamiamo una cella *buona* se, partendo da quella cella, Turbo visita ogni cella della griglia esattamente una volta, senza mai lasciare la griglia, e tornando alla casella iniziale alla fine.

Determinare, in funzione di n, il numero massimo di caselle buone al variare fra tutte le possibili configurazioni iniziali.

Problema 6. In ogni cella di una griglia 2025×2025 è stato scritto un numero reale non negativo, in modo che la somma dei numeri in ogni riga è pari ad 1, e la somma dei numeri in ogni colonna è pari ad 1. Definiamo r_i il massimo valore nella riga i, e sia $R = r_1 + r_2 + \cdots + r_{2025}$. Analogamente, definiamo c_i il massimo valore nella colonna i, e sia $C = c_1 + c_2 + \cdots + c_{2025}$.
Qual è il più grande valore possibile per $\frac{R}{C}$?

Tempo a disposizione: 4 ore e 30 minuti
Ogni problema vele 7 punti