EGMO 2025
European Girls' Mathematical Olympiad
KOSOVA

Language: **Hungarian**

Day: 2

2025. április 14. hétfő

Feladat 4. Legyen ABC egy hegyesszögű háromszög, amire $AB \neq AC$, a beírt körének középpontját jelölje I. A BI és CI egyenesek az ABC háromszög körülírt körét rendre a $P \neq B$ illetve $Q \neq C$ pontokban metszik. Az R és S pontokat vegyük fel úgy, hogy $AQRB$ és $ACSP$ paralelogrammák legyenek (úgy, hogy $AQ \parallel RB$, $AB \parallel QR$, $AC \parallel SP$, és $AP \parallel CS$). Legyen T az RB és SC egyenesek metszéspontja. Bizonyítsuk be, hogy R, S, T, és I egy körön helyezkednek el.

Feladat 5. Legyen $n > 1$ egy egész szám. Egy $n \times n$-es tábla *konfigurációjában* az n^2 mező mindegyike tartalmaz egy nyilat, ami vagy felfelé, vagy lefelé, vagy balra, vagy jobbra mutat. Adott kezdő konfigurációra Turbó a csiga a tábla egyik mezőjéből indul és mezőről mezőre lépked. Minden lépésben Turbó egy négyzetnyit lép abban az irányban, amelyre a mezőjében levő nyíl mutat (ezzel lehet, hogy lelép a tábláról). Minden lépés után a nyilak az összes mezőben elfordulnak $90°$-kal az óramutató járásával ellenkező irányban. Egy mezőt *jónak* nevezünk, ha abból a mezőből kiindulva Turbó a tábla minden mezőjét pontosan egyszer érinti anélkül, hogy elhagyná a táblát és a végén a kiinduló mezőjébe ér vissza. Határozzuk meg az n függvényében a jó mezők maximális számát az összes lehetséges kezdő konfigurációban.

Feladat 6. Egy 2025×2025-ös tábla minden mezőjébe egy nemnegatív valós szám van írva úgy, hogy minden sorban a számok összege 1, és minden oszlopban a számok összege 1. Legyen r_i a legnagyobb szám az i-edik sorban, és legyen $R = r_1 + r_2 + \cdots + r_{2025}$. Hasonlóan legyen c_i a legnagyobb szám az i-edik oszlopban és legyen $C = c_1 + c_2 + \cdots + c_{2025}$.
Mi a lehető legnagyobb értéke $\frac{R}{C}$-nek?

Idő: 4 óra 30 perc
Minden feladat 7 pontot ér