Language: **Greek**

Day: **2**

Δευτέρα, 14 Απριλίου 2025

Πρόβλημα 4. Έστω ABC οξυγώνιο τρίγωνο με έγκεντρο I και $AB \neq AC$. Έστω ότι οι ευθείες BI και CI τέμνουν τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ABC στα σημεία $P \neq B$ και $Q \neq C$, αντίστοιχα. Θεωρούμε τα σημεία R και S τέτοια ώστε τα $AQRB$ και $ACSP$ να είναι παραλληλόγραμμα (με $AQ \parallel RB$, $AB \parallel QR$, $AC \parallel SP$, και $AP \parallel CS$). Έστω T το σημείο τομής των ευθειών RB και SC. Να δείξετε ότι τα σημεία R, S, T, και I είναι ομοκυκλικά.

Πρόβλημα 5. Έστω $n > 1$ ένας ακέραιος. Σε μια *διάταξη* ενός $n \times n$ πίνακα, κάθε ένα από τα n^2 κελιά περιέχει ένα βέλος, το οποίο δείχνει προς τα πάνω, προς τα κάτω, προς τα αριστερά, ή προς τα δεξιά. Δεδομένης μιας αρχικής διάταξης, η Turbo το σαλιγκάρι ξεκινά από ένα από τα κελιά του πίνακα και μετακινείται από κελί σε κελί. Σε κάθε της κίνηση, η Turbo μετακινείται κατά ένα κελί προς την κατεύθυνση που υποδεικνύεται από το βέλος στο κελί όπου βρίσκεται (ενδεχομένως να βγει και εκτός του πίνακα). Μετά από κάθε κίνηση, όλα τα βέλη σε όλα τα κελιά περιστρέφονται κατά 90° αντίθετα από τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Ονομάζουμε ένα κελί *καλό* αν, ξεκινώντας από αυτό το κελί, η Turbo επισκέπτεται κάθε κελί του πίνακα ακριβώς μία φορά, χωρίς να βγει ποτέ εκτός του πίνακα, και στο τέλος επιστρέφει στο αρχικό της κελί.

Να προσδιορίσετε, σε σχέση με το n, τον μέγιστο αριθμό καλών κελιών που μπορεί να υπάρχουν, λαμβάνοντας υπόψη όλες τις δυνατές αρχικές διατάξεις.

Πρόβλημα 6. Σε κάθε κελί ενός 2025×2025 πίνακα, είναι γραμμένος ένας μη αρνητικός πραγματικός αριθμός έτσι ώστε το άθροισμα των αριθμών σε κάθε γραμμή να είναι ίσο με 1, και το άθροισμα των αριθμών σε κάθε στήλη να είναι επίσης ίσο με 1. Έστω r_i η μεγαλύτερη τιμή στη γραμμή i, και έστω $R = r_1 + r_2 + \cdots + r_{2025}$. Έστω c_i η μεγαλύτερη τιμή στη στήλη i, και έστω $C = c_1 + c_2 + \cdots + c_{2025}$. Ποια είναι η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του $\frac{R}{C}$;

Γλώσσα: Ελληνικά

Διάρκεια: 4 ώρες και 30 λεπτά
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 7 μονάδες