EGMO 2025
European Girls' Mathematical Olympiad
KOSOVA

Language: **French**

Day: 2

Lundi 14 avril 2025

Problème 4. Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus avec $AB \neq AC$ et soit I le centre de son cercle inscrit. Les droites BI et CI recoupent le cercle circonscrit à ABC respectivement en $P \neq B$ et $Q \neq C$. On considère les points R et S tels que $AQRB$ et $ACSP$ soient des parallélogrammes (avec $AQ // RB$, $AB // RQ$, $AC // SP$ et $AP // CS$).

Soit T le point d'intersection des droites RB et SC. Montrer que les points R, S, T et I sont cocycliques.

Problème 5. Soit $n > 1$ un entier. Dans une *configuration* initiale, chacune des n^2 cases d'un tableau $n \times n$ contient une flèche qui pointe soit vers le haut, soit vers le bas, soit vers la gauche, soit vers la droite. Étant donnée une configuration initiale, Turbo l'escargot part d'une des cases et se déplace de case en case. À chaque déplacement, Turbo avance d'une case dans la direction de la flèche de la case où elle se trouve (elle peut éventuellement sortir du tableau). Après chaque déplacement, les flèches de toutes les cases tournent de 90° dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. On dit qu'une case est *bonne* lorsque partant de cette case, Turbo visite exactement une fois chacune des cases du tableau, sans jamais sortir du tableau et revient au final à sa case de départ. Déterminer, en fonction de n, le nombre maximal de bonnes cases parmi toutes les configurations initiales possibles.

Problème 6. Dans chaque case d'un tableau 2025×2025 est écrit un réel positif ou nul de sorte que la somme de tous les nombres de chaque ligne est égale à 1, et de même la somme de tous les nombres de chaque colonne est égale à 1. On définit r_i comme étant le plus grand nombre inscrit dans la ligne i, et on pose $R = r_1 + r_2 + \cdots + r_{2025}$. De même, on définit c_i comme étant le plus grand nombre inscrit dans la colonne i, et on pose $C = c_1 + c_2 + \cdots + c_{2025}$.
Quelle est la plus grande valeur possible pour $\frac{R}{C}$?

Durée: 4 heures et 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points