EGMO 2025
European Girls' Mathematical Olympiad
KOSOVA

Неділя, 13 квітня, 2025

Задача 1. Для натурального числа N через $c_1 < c_2 < \cdots < c_m$ позначимо всі натуральні числа менше за N, що взаємно прості з числом N. Знайдіть усі такі $N \geq 3$, що

$$\text{НСД}(N, c_i + c_{i+1}) \neq 1$$

для всіх $1 \leq i \leq m-1$.

Тут НСД(a, b) *– найбільше натуральне число, на яке діляться обидва числа a та b. Цілі числа a та b називаються взаємно простими, якщо* НСД$(a, b) = 1$.

Задача 2. Нескінченна зростаюча послідовність натуральних чисел $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$ називається *центральною*, якщо для довільного натурального числа n, середнє арифметичне перших a_n членів послідовності дорівнює a_n.

Доведіть, що існує така нескінченна послідовність натуральних чисел b_1, b_2, b_3, $\ldots$, що для довільної центральної послідовності a_1, a_2, a_3, $\ldots$, існує нескінченно багато таких натуральних чисел n, що $a_n = b_n$.

Задача 3. Нехай ABC – гострокутний трикутник. Точки B, D, E та C лежать на одній прямій у вказаному порядку і задовольняють умову $BD = DE = EC$. Нехай M та N – середини AD та AE, відповідно. Припустимо, що трикутник ADE є гострокутним, і нехай H – його ортоцентр. Нехай P та Q такі точки на прямих BM та CN відповідно, що точки D, H, M та P лежать на одному колі та є попарно різними, і точки E, H, N та Q також лежать на одному колі та є попарно різними. Доведіть, що точки P, Q, N та M лежать на одному колі.

Ортоцентром трикутника називається точка перетину його висот.

Час виконання: 4 години 30 хвилин
Кожна задача оцінюється в 7 балів