EGMO 2025
European Girls' Mathematical Olympiad
KOSOVA

Language: **Spanish**

Day: **1**

Domingo, 13 de abril de 2025

Problema 1. Para un entero positivo N, sean $c_1 < c_2 < \cdots < c_m$ todos los enteros positivos menores que N, que son coprimos con N. Encuentre todos los enteros $N \geq 3$ tales que

$$mcd(N, c_i + c_{i+1}) \neq 1$$

para todo i, donde $1 \leq i \leq m - 1$.

Nota: $mcd(a, b)$ es el mayor entero positivo que divide a los enteros a y b. Decimos que a es coprimo con b si $mcd(a, b) = 1$.

Problema 2. Una sucesión infinita y creciente $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$ de enteros positivos se llama *central* si, para todo entero positivo n, la media aritmética de los primeros a_n términos de la sucesión es igual a a_n.
Demuestre que existe una sucesión infinita $b_1, b_2, b_3, \ldots$ de enteros positivos tal que, para toda sucesión central a_1, a_2, a_3, ..., hay infinitos enteros positivos n con $a_n = b_n$.

Problema 3. Sea ABC un triángulo acutángulo. Tomamos puntos D y E de manera que B, D, E, y C están sobre una recta (en ese orden) y tales que $BD = DE = EC$. Supongamos que el triángulo ADE es acutángulo y sea H su ortocentro. Sean M y N los puntos medios de los segmentos AD y AE respectivamente. Sean P y Q puntos en las rectas BM y CN respectivamente, tales que D, H, M y P son todos distintos entre sí y concíclicos, y E, H, N y Q son todos distintos entre sí y concíclicos. Demuestre que P, Q, N y M también son concíclicos.

Nota: el ortocentro de un triángulo es el punto de intersección de sus alturas. Decimos que cuatro puntos son concíclicos si están sobre una misma circunferencia.

Language: Español

Tiempo: 4 horas y 30 minutos
Cada problema vale 7 puntos