Language: **Slovenian**

Day: **1**

nedelja, 13. april 2025

Naloga 1. Za naravno število N naj bodo $c_1 < c_2 < \cdots < c_m$ vsa naravna števila manjša od N, ki so tuja N. Poišči vse $N \geq 3$, za katere velja

$$D(N, c_i + c_{i+1}) \neq 1$$

za vsak $1 \leq i \leq m - 1$.

Izraz $D(a, b)$ predstavlja največje naravno število, ki deli a in b. Celi števili a in b sta si tuji, če je $D(a, b) = 1$.

Naloga 2. Neskončno naraščajoče zaporedje naravnih števil $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$ je *središčno*, če je za vsako naravno število n aritmetična sredina prvih a_n členov zaporedja enaka a_n.

Dokaži, da obstaja neskončno zaporedje naravnih števil b_1, b_2, b_3, $\ldots$, tako da za vsako središčno zaporedje a_1, a_2, a_3, $\ldots$ obstaja neskončno mnogo naravnih števil n, da je $a_n = b_n$.

Naloga 3. Naj bo ABC ostrokotni trikotnik. Točke B, D, E in C v tem vrstnem redu ležijo na isti premici in zadoščajo $|BD| = |DE| = |EC|$. Naj bosta M in N zaporedoma razpolovišči daljic AD in AE. Denimo, da je trikotnik ADE ostrokoten in naj bo H njegova višinska točka. Naj bosta P in Q zaporedoma točki na premicah BM in CN, tako da so točke D, H, M in P koncikliične in paroma različne, ter da so točke E, H, N in Q konciklične in paroma različne. Dokaži, da so točke P, Q, N in M konciklične.

Višinska točka trikotnika je presečišče njegovih višin.

Čas pisanja: 4 ure in 30 minut
Vsaka naloga je vredna 7 točk.