nedeľa 13. apríla 2025

Úloha 1. Pre kladné celé číslo N označme $c_1 < c_2 < \cdots < c_m$ všetky kladné celé čísla menšie ako N, ktoré sú nesúdeliteľné s N. Nájdite všetky $N \geq 3$, pre ktoré platí

$$\mathrm{NSD}(N, c_i + c_{i+1}) \neq 1$$

pre všetky $1 \leq i \leq m - 1$.

Značením NSD(a, b) myslíme najväčšie kladné celé číslo, ktoré delí obe čísla a i b. Čísla a, b sú nesúdeliteľné práve vtedy, keď NSD$(a, b) = 1$.

Úloha 2. Nekonečná postupnosť $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$ kladných celých čísel je *vycentrovaná*, ak pre každé kladné celé číslo n je aritmetický priemer prvých a_n členov postupnosti rovný hodnote a_n.

Dokážte, že existuje nekonečná postupnosť b_1, b_2, b_3, ... kladných celých čísel taká, že pre každú vycentrovanú postupnosť a_1, a_2, a_3, ... existuje nekonečne veľa kladných celých čísel n, pre ktoré platí $a_n = b_n$.

Úloha 3. Nech ABC je ostrouhlý trojuholník. Body B, D, E a C ležia na priamke v tomto poradí a spĺňajú $|BD| = |DE| = |EC|$. Nech M a N sú postupne stredy AD a AE. Predpokladajme, že trojuholník ADE s ortocentrom H je ostrouhlý. Nech P a Q sú body postupne na BM a CN také, že body D, H, M, P ležia na kružnici a sú po dvoch rôzne a body E, H, N, Q ležia na kružnici a sú po dvoch rôzne. Dokážte, že body P, Q, N, M ležia na kružnici.

Ortocentrom trojuholníka rozumieme priesečník jeho výšok.

Čas na riešenie: 4 hodiny a 30 minút
Za každú úlohu je možné získať najviac 7 bodov.