Воскресенье, 13 апреля 2025 года

Задача 1. Для положительного целого числа N обозначим через $c_1 < c_2 < \ldots < c_m$ все положительные целые числа, меньшие N и взаимно простые с N. Найдите все такие $N \geqslant 3$, что

$$\text{НОД}(N,\, c_i + c_{i+1}) \neq 1$$

для всех $1 \leqslant i \leqslant m - 1$.

Здесь НОД(a, b) это наибольший общий делитель. Числа a и b называются взаимно простыми, если НОД$(a, b) = 1$.

Задача 2. Бесконечную возрастающую последовательность $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ положительных целых чисел назовём *центральной*, если для каждого положительного целого n среднее арифметическое первых a_n членов последовательности равно a_n.

Докажите, что существует бесконечная последовательность положительных целых чисел b_1, b_2, b_3, $\ldots$ такая, что для любой центральной последовательности a_1, a_2, a_3, $\ldots$ существует бесконечно много n, что $a_n = b_n$.

Задача 3. Дан остроугольный треугольник ABC. Точки B, D, E, C лежат на одной прямой в указанном порядке и удовлетворяют равенствам $BD = DE = EC$. Точки M и N — середины отрезков AD и AE соответственно. Известно, что треугольник ADE остроугольный, а H — точка пересечения высот этого треугольника. Пусть точки P и Q лежат на прямых BM и CN соответственно так, что точки D, H, M, P попарно разные и лежат на одной окружности, и точки E, H, N, Q попарно разные и лежат на одной окружности. Докажите, что точки P, Q, N, M лежат на одной окружности.

Время работы: 4 часа и 30 минут
Каждая задача оценивается в 7 баллов