EGMO 2025
European Girls' Mathematical Olympiad
KOSOVA

Language: **Romanian**

Day: **1**

Duminică, 13 aprilie 2025

Problema 1. Pentru un număr natural nenul N, fie $c_1 < c_2 < \cdots < c_m$ toate numerele naturale nenule, mai mici decât N și prime cu N. Determinați toate numerele $N \geq 3$ astfel încât

$$\text{c.m.m.d.c.}(N, c_i + c_{i+1}) \neq 1,$$

pentru orice $1 \leq i \leq m-1$.

Notaţia c.m.m.d.c.(a, b) *desemnează cel mai mare număr natural care divide numerele a şi b. Numărul a este prim cu numărul b dacă* c.m.m.d.c.$(a, b) = 1$.

Problema 2. Un șir strict crescător $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ de numere naturale nenule va fi numit *centrat* dacă, pentru orice număr natural nenul n, media aritmetică a primilor a_n termeni ai șirului este egală cu a_n.

Arătați că există un șir $b_1, b_2, b_3, \ldots$ de numere naturale nenule cu proprietatea: pentru orice șir centrat $a_1, a_2, a_3, \ldots$ există o infinitate de numere naturale n astfel încât $a_n = b_n$.

Problema 3. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic. Punctele B, D, E, C sunt coliniare, în această ordine, și satisfac relația $BD = DE = EC$. Fie M și N mijloacele segmentelor AD, respectiv AE. Presupunem că triunghiul ADE este ascuțitunghic și are ortocentrul H. Fie P și Q puncte pe dreptele BM, respectiv CN, astfel încât punctele D, H, M, P să fie conciclice și diferite două câte două, iar punctele E, H, N, Q să fie conciclice și diferite două câte două. Demonstrați că punctele P, Q, N, M sunt conciclice.

Ortocentrul unui triunghi este punctul de intersecţie a înălţimilor sale.

Timp: 4 ore şi 30 de minute
Fiecare problemă valorează 7 puncte