Domingo, 13 de abril de 2025

Problema 1. Para um inteiro positivo N, sejam $c_1 < c_2 < \cdots < c_m$ todos os inteiros positivos menores que N que são coprimos com N. Encontre todos os $N \geq 3$ tais que

$$\mathrm{mdc}(N, c_i + c_{i+1}) \neq 1$$

para todo $1 \leq i \leq m - 1$.

Aqui $mdc(a, b)$ *é o maior inteiro positivo que divide ambos* a *e* b*. Inteiros* a *e* b *são coprimos se* $mdc(a, b) = 1$*.*

Problema 2. Uma sequência infinita crescente $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$ de inteiros positivos é chamada *central* se, para qualquer inteiro positivo n, a média aritmética dos primeiros a_n termos da sequência é igual à a_n.

Prove que existe uma sequência infinita $b_1, b_2, b_3, \ldots$ de inteiros positivos tal que, para toda sequência central $a_1, a_2, a_3, \ldots$, há infinitos inteiros positivos n com $a_n = b_n$.

Problema 3. Seja ABC um triângulo acutângulo. Os pontos B, D, E, e C estão sobre uma reta, nesta ordem, e satisfazem $BD = DE = EC$. Sejam M e N os pontos médios de AD e AE, respectivamente. Suponha que o triângulo ADE é agudo, e seja H o ortocentro dele. Os pontos P e Q estão nas retas BM e CN, respectivamente, de modo que D, H, M, e P estão sobre uma mesma circunferência e são todos diferentes, e E, H, N, e Q estão sobre uma mesma circunferência e são todos diferentes. Prove que P, Q, N, e M estão sobre uma mesma circunferência.

O ortocentro de um triângulo é o ponto de interseção das alturas dele.

Tempo: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 7 pontos