EGMO 2025
European Girls' Mathematical Olympiad
KOSOVA

Language: **Polish**

Day: **1**

Niedziela, 13 kwietnia 2025

Zadanie 1. Dla dodatniej liczby całkowitej N, niech $c_1 < c_2 < \cdots < c_m$ będą wszystkimi dodatnimi liczbami całkowitymi mniejszymi niż N, które są względnie pierwsze z N. Znaleźć wszystkie liczby $N \geq 3$ takie że

$$nwd(N, c_i + c_{i+1}) \neq 1$$

dla wszystkich $1 \leq i \leq m - 1$.

Tutaj $nwd(a, b)$ oznacza największą liczbę całkowitą która dzieli zarówno a jak i b. Liczby całkowite a i b są względnie pierwsze jeżeli $nwd(a, b) = 1$.

Zadanie 2. Nieskończony rosnący ciąg $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$ liczb całkowitych dodatnich nazywamy *centralnym* jeżeli dla każdej liczby całkowitej dodatniej n, średnia arytmetyczna pierwszych a_n wyrazów ciągu jest równa a_n.

Pokazać, że istnieje nieskończony ciąg $b_1, b_2, b_3, \ldots$ liczb całkowitych dodatnich taki że dla każdego ciągu centralnego a_1, a_2, a_3, $\ldots$, istnieje nieskończenie wiele liczb całkowitych dodatnich n takich że $a_n = b_n$.

Zadanie 3. Niech ABC będzie trójkątem ostrokątnym. Punkty B, D, E, i C leżą na jednej prostej w tej kolejności i zachodzi $BD = DE = EC$. Punkty M i N są odpowiednio środkami AD i AE. Załóżmy, że trójkąt ADE jest ostrokątny, a punkt H jest jego ortocentrum. Niech P i Q będą punktami leżącymi odpowiednio na prostych BM i CN, takimi że D, H, M, i P są parami różne i leżą na jednym okręgu oraz E, H, N, i Q są parami różne i leżą na jednym okręgu. Udowodnić że P, Q, N, i M leżą na jednym okręgu.

Ortocentrum trójkąta to punkt przecięcia jego wysokości.

Czas pracy: 4 godziny i 30 minut
Za każde zadanie można otrzymać 7 punktów