EGMO 2025
European Girls' Mathematical Olympiad
KOSOVA

Language: **Norwegian**

Day: **1**

Søndag 13. April 2025

Oppgave 1. For et positivt heltall N, la $c_1 < c_2 < \cdots < c_m$ være alle positive heltall mindre enn N som er relativt primiske med N. Finn alle $N \geq 3$ slik at

$$\gcd(N, c_i + c_{i+1}) \neq 1$$

for alle $1 \leq i \leq m - 1$.

Her er $\gcd(a, b)$ *det største positive heltallet som deler både a og b. Heltall a og b er relativt primiske hvis $gcd(a, b) = 1$.*

Oppgave 2. En uendelig voksende følge $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$ av positive heltall kalles *sentral* hvis gjennomsnittet av de første a_n leddene i følgen er lik a_n, for alle positive heltall n. Vis at det finnes en uendelig følge $b_1, b_2, b_3, \ldots$ av positive heltall med følgende egenskap: For hver sentral følge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ finnes det uendelig mange positive heltall n slik at $a_n = b_n$.

Oppgave 3. La ABC være en spissvinklet trekant. Punktene B, D, E og C ligger på en linje i denne rekkefølgen slik at $|BD| = |DE| = |EC|$. La M og N være midtpunktene på henholdsvis AD og AE. Anta at trekant ADE er spissvinklet, og la H være ortosenteret av ADE. Punktene P og Q ligger på å henholdsvis linjen BM og linjen CN, slik at punktene D, H, M og P ligger på en sirkel og er parvis forskjellige, og punktene E, H, N og Q ligger på en sirkel og er parvis forskjellige. Vis at P, Q, N og M ligger på en sirkel.

Ortosenteret av en trekant er skjæringspunktet mellom trekantens høyder.