EGMO 2025
European Girls' Mathematical Olympiad
KOSOVA

Language: **Japanese**

Day: **1**

2025 年 4 月 13 日 日曜日

問題 1. 以下の条件をみたす 3 以上の整数 N をすべて求めよ.

> N と互いに素な N 未満のすべての正の整数を小さい順に $c_1 < c_2 < \cdots < c_m$ とするとき, 1 以上 $m-1$ 以下の任意の整数 i について,
>
> $$\gcd(N, c_i + c_{i+1}) \neq 1$$
>
> が成り立つ.

ただし, 正の整数 a, b に対し, a と b の最大公約数を $\gcd(a, b)$ で表す.

問題 2. 正の整数からなる狭義単調増加な数列 $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$ が**中心的**であるとは, 任意の正の整数 n に対し, この数列の初項から第 a_n 項までの a_n 個の項の平均が a_n に等しいことをいう. このとき, 以下の条件をみたす正の整数列 $b_1, b_2, b_3, \ldots$ が存在することを示せ.

> どの中心的な数列 $a_1, a_2, a_3, \ldots$ に対しても, 正の整数 n であって $a_n = b_n$ となるものが無限個存在する.

問題 3. 鋭角三角形 ABC の辺 BC 上に点 D, E を, 4 点 B, D, E, C がこの順に並び, さらに $BD = DE = EC$ をみたすようにとる. 線分 AD, AE の中点をそれぞれ M, N とする. 三角形 ADE が鋭角三角形であると仮定し, その垂心を H とする. 直線 BM, CN 上にそれぞれ点 P, Q をとると, D, H, M, P は同一円周上にある相異なる 4 点であり, E, H, N, Q もまた同一円周上にある相異なる 4 点であった. このとき, 4 点 P, Q, N, M は同一円周上にあることを示せ.

時間：4 時間 30 分
各問 7 点