EGMO 2025
European Girls' Mathematical Olympiad
KOSOVA

Language: **Italian**

Day: **1**

Domenica, 13 aprile 2025

Problema 1. Fissato un intero strettamente positivo N, siano $c_1 < c_2 < \cdots < c_m$ tutti gli interi strettamente positivi minori di N e coprimi con N. Determinare tutti gli $N \geq 3$ tali che

$$\mathrm{MCD}(N, c_i + c_{i+1}) \neq 1$$

per ogni $1 \leq i \leq m - 1$.

Per MCD(a, b) si intende il maggiore intero positivo che divide sia a che b. Gli interi a e b sono coprimi se MCD$(a, b) = 1$.

Problema 2. Una sequenza infinita e crescente di interi strettamente positivi $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$ è detta *centrale* se per ogni intero positivo n la media aritmetica dei primi a_n termini della sequenza è uguale ad a_n.

Mostrare che esiste una sequenza infinita $b_1, b_2, b_3, \ldots$ di interi positivi tale che per ogni sequenza centrale $a_1, a_2, a_3, \ldots$, ci sono infiniti interi positivi n tali che $a_n = b_n$.

Problema 3. Sia ABC un triangolo acutangolo. I punti B, D, E, e C giacciono su una retta in quest'ordine e soddisfano $BD = DE = EC$. Siano M ed N i punti medi di AD ed AE, rispettivamente. Supponiamo che il triangolo ADE sia acutangolo, e sia H il suo ortocentro. I punti P e Q giacciono sulle rette BM e CN, rispettivamente, in modo che D, H, M, e P siano a due distinti e formino un quadrilatero ciclico, ed E, H, N, e Q siano a due a due distinti e formino un quadrilatero cicilco. Dimostrare che P, Q, N, ed M formano un quadrilatero ciclico.

L'ortocentro di un triangolo è il punto di intersezione delle sue altezze.

Tempo a disposizione: 4 ore e 30 minuti
Ogni problema vale 7 punti