EGMO 2025
European Girls' Mathematical Olympiad
KOSOVA

2025. április 13. vasárnap

Feladat 1. Egy pozitív egész N-re legyenek $c_1 < c_2 < \cdots < c_m$ azok az N-nél kisebb pozitív egészek, amik relatív prímek N-hez. Keressük meg az összes $N \geq 3$ számot, melyre

$$\text{lnko}(N, c_i + c_{i+1}) \neq 1$$

minden $1 \leq i \leq m-1$-re.

Az lnko(a,b) az a legnagyobb pozitív egész szám, ami osztja a-t és b-t. Az a és b egészek relatív prímek, ha lnko$(a,b) = 1$.

Feladat 2. Pozitív egészek végtelen, monoton növő $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$ sorozatát *centrálisnak* hívunk, ha minden pozitív egész n esetén a sorozat első a_n tagjának átlaga egyenlő a_n-nel.

Mutassuk meg, hogy létezik egy pozitív egészekből álló, végtelen b_1, b_2, b_3, $\ldots$ sorozat úgy, hogy minden a_1, a_2, a_3, $\ldots$ centrális sorozatra végtelen sok olyan pozitív egész n van, melyre $a_n = b_n$.

Feladat 3. Legyen ABC egy hegyesszögű háromszög, a B, D, E, és C pontok egy egyenesre esnek ebben a sorrendben úgy, hogy $BD = DE = EC$. Az AD és AE szakaszok felezőpontjai legyenek rendre M és N. Tegyük fel, hogy az ADE háromszög hegyesszögű, és legyen H a magasságpontja. Legyenek a P és Q pontok rendre a BM illetve CN egyeneseken úgy, hogy D, H, M, és P páronként különbözőek és egy körön helyezkednek el, valamint E, H, N, és Q páronként különbözőek és egy körön helyezkednek el. Bizonyítsuk be, hogy P, Q, N, és M egy körön helyezkednek el.

Egy háromszög magasságpontja a magasságvonalainak a metszéspontja.

Idő: 4 óra 30 perc
Minden feladat 7 pontot ér