Κυριακή, 13 Απριλίου 2025

Πρόβλημα 1. Για κάθε θετικό ακέραιο N, έστω $c_1 < c_2 < \cdots < c_m$ όλοι οι θετικοί ακέραιοι μικρότεροι του N οι οποίοι είναι σχετικά πρώτοι με τον N. Να βρείτε όλους τους αριθμούς $N \geq 3$ τέτοιους ώστε

$$\text{ΜΚΔ}(N, c_i + c_{i+1}) \neq 1$$

για κάθε $1 \leq i \leq m - 1$.

Εδώ ο $\text{ΜΚΔ}(a, b)$ είναι ο μεγαλύτερος θετικός ακέραιος που διαιρεί και τον a και τον b. Οι ακέραιοι a και b είναι σχετικά πρώτοι μεταξύ τους αν $\text{ΜΚΔ}(a, b) = 1$.

Πρόβλημα 2. Μια άπειρη γνησίως αύξουσα ακολουθία $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$ θετικών ακέραιων αριθμών αποκαλείται ***κεντρική*** αν για κάθε θετικό ακέραιο n, ο μέσος όρος των πρώτων a_n όρων της ακολουθίας είναι ίσος με a_n.

Να δείξετε ότι υπάρχει μια άπειρη ακολουθία $b_1, b_2, b_3, \ldots$ θετικών ακέραιων αριθμών τέτοια, ώστε για κάθε κεντρική ακολουθία $a_1, a_2, a_3, \ldots$, υπάρχουν άπειροι θετικοί ακέραιοι n με $a_n = b_n$.

Πρόβλημα 3. Έστω ABC ένα οξυγώνιο τρίγωνο. Τα σημεία B, D, E, και C βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία με αυτή τη σειρά, και ικανοποιούν την σχέση $BD = DE = EC$. Έστω M και N τα μέσα των AD και AE, αντίστοιχα. Έστω ότι το τρίγωνο ADE είναι οξυγώνιο και έστω H το ορθόκεντρό του. Έστω P και Q σημεία στις ευθείες BM και CN, αντίστοιχα, τέτοια, ώστε τα σημεία D, H, M, και P να είναι ομοκυκλικά και διαφορετικά ανά δύο, και τα σημεία E, H, N, και Q να είναι επίσης ομοκυκλικά και διαφορετικά ανά δύο. Να δείξετε ότι τα σημεία P, Q, N, και M είναι ομοκυκλικά.

Το ορθόκεντρο ενός τριγώνου είναι το σημείο τομής των υψών του.