Language: **German**

Day: **1**

EGMO 2025
European Girls' Mathematical Olympiad
KOSOVA

Sonntag, 13. April 2025

Aufgabe 1. Für eine positive ganze Zahl N seien $c_1 < c_2 < \cdots < c_m$ alle positiven ganzen Zahlen kleiner als N, die teilerfremd zu N sind. Bestimme alle $N \geq 3$, sodass

$$\mathrm{ggT}(N, c_i + c_{i+1}) \neq 1$$

für alle $1 \leq i \leq m - 1$.

Hier sei $\mathrm{ggT}(a, b)$ *die grösste positive ganze Zahl, die sowohl* a *als auch* b *teilt. Zahlen* a *und* b *sind teilerfremd, falls* $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$.

Aufgabe 2. Eine unendliche, aufsteigende Folge $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$ positiver ganzer Zahlen heisse *zentral*, wenn für jede positive ganze Zahl n das arithmetische Mittel der ersten a_n Folgenglieder gleich a_n ist.
Zeige, dass es eine unendliche Folge $b_1, b_2, b_3, \ldots$ positiver ganzer Zahlen gibt, sodass für jede zentrale Folge $a_1, a_2, a_3 \ldots$ unendlich viele positive ganze Zahlen n mit $a_n = b_n$ existieren.

Aufgabe 3. Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck. Die Punkte B, D, E und C liegen in dieser Reihenfolge auf einer Geraden, sodass $BD = DE = EC$ gilt. Sei M beziehungsweise N der Mittelpunkt der Strecke AD beziehungsweise AE. Angenommen das Dreieck ADE ist spitzwinklig. Sei H der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ADE. Seien P und Q Punkte auf der Geraden BM beziehungsweise CN, sodass D, H, M, und P auf einem Kreis liegen und paarweise verschieden sind, beziehungsweise sodass E, H, N, und Q auf einem Kreis liegen und paarweise verschieden sind. Zeige, dass P, Q, N und M auf einem Kreis liegen.

Zeit: 4 Stunden und 30 Minuten
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert