Dimanche 13 avril 2025

Problème 1. Pour tout entier N strictement positif, on pose $c_1 < c_2 < \cdots < c_m$ tous les entiers strictement positifs inférieurs à N et premiers avec N. Trouver tous les nombres $N \geqslant 3$ tels que

$$pgcd(N, c_i + c_{i+1}) \neq 1$$

pour tout $1 \leqslant i \leqslant m - 1$.

Ici, $pgcd(a, b)$ désigne le plus grand entier strictement positif qui divise à la fois a et b. Les entiers a et b sont premiers entre eux si $pgcd(a, b) = 1$.

Problème 2. Une suite infinie, croissante, d'entiers strictement positifs $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ est dite *centrale* si pour tout entier strictement positif n, la moyenne arithmétique des a_n premiers termes de la suite est égale à a_n.

Montrer qu'il existe une suite infinie $b_1, b_2, b_3, \ldots$ d'entiers strictement positifs telle que pour toute suite centrale $a_1, a_2, a_3, \ldots$, il existe une infinité d'entiers strictement positifs n vérifiant $a_n = b_n$.

Problème 3. Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus. Les points B, D, E et C sont alignés dans cet ordre et vérifient $BD = DE = EC$. Soient M et N les milieux respectifs des segments AD et AE. On suppose que tous les angles du triangle ADE sont aigus et on nomme H son orthocentre. Soient P et Q des points situés respectivement sur les droites BM et CN tels que D, H, M, et P sont cocycliques et deux à deux distincts, et qu'il en est de même pour E, H, N et Q. Prouver que P, Q, N et M sont cocycliques.

L'orthocentre d'un triangle est le point d'intersection de ses hauteurs.

Durée: 4 heures et 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points