EGMO 2025
European Girls' Mathematical Olympiad
KOSOVA

Language: **Estonian**

Day: **1**

Pühapäev, 13. aprill 2025

Ülesanne 1. Positiivse täisarvu N korral olgu $c_1 < c_2 < \cdots < c_m$ kõik sellised arvust N väiksemad positiivsed täisarvud, mis on arvuga N ühistegurita. Leia kõik $N \geq 3$, mille korral

$$\text{SÜT}(N, c_i + c_{i+1}) \neq 1$$

kehtib iga $1 \leq i \leq m-1$ korral.

Siin SÜT(a, b) tähistab suurimat positiivset täisarvu, mis jagab mõlemat arvudest a ja b. Täisarvud a ja b on ühistegurita, kui SÜT$(a, b) = 1$.

Ülesanne 2. Ütleme, et lõpmatu kasvav positiivsete täisarvude jada $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$ on *keskne*, kui iga positiivse täisarvu n korral on jada esimese a_n liikme aritmeetiline keskmine võrdne arvuga a_n.

Näita, et leidub lõpmatu positiivsete täisarvude jada $b_1, b_2, b_3, \ldots$ nii, et iga keskse jada $a_1, a_2, a_3, \ldots$ korral on lõpmatult palju positiivseid täisarve n, mille korral $a_n = b_n$.

Ülesanne 3. Olgu ABC teravnurkne kolmnurk. Punktid B, D, E ja C asuvad nimetatud järjekorras ühel sirgel ning rahuldavad võrdusi $BD = DE = EC$. Olgu M ja N vastavalt lõikude AD ja AE keskpunktid. Eeldame, et kolmnurk ADE on teravnurkne ning olgu H tema kõrguste lõikepunkt. Punktid P ja Q valitakse vastavalt sirgetel BM ja CN nii, et punktid D, H, M ja P asuvad ühel ringjoonel ja on paarikaupa erinevad ning punktid E, H, N ja Q asuvad ühel ringjoonel ja on paarikaupa erinevad. Tõesta, et punktid P, Q, N ja M asuvad ühel ringjoonel.

Lahendamisaeg: 4 tundi ja 30 minutit
Iga ülesanne annab 7 punkti