Language: **Dutch**

Day: **1**

Zondag 13 april 2025

Opgave 1. Voor een positief geheel getal N, zij $c_1 < c_2 < \ldots < c_m$ alle (strikt) positieve gehele getallen kleiner dan N die compriem zijn met N. Vind alle $N \geq 3$ zodat

$$\operatorname{ggd}(N, c_i + c_{i+1}) \neq 1$$

voor alle $1 \leq i \leq m - 1$.

De $\operatorname{ggd}(a, b)$ *is het grootste positieve gehele getal dat zowel a als b deelt. Twee positieve gehele getallen s en t zijn copriem precies als* $\operatorname{ggd}(s, t) = 1$.

Opgave 2. Een oneindig (strikt) stijgend rijtje $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ van (strikt) positieve gehele getallen heet *centraal* als voor elk (strikt) positief geheel getal n, het (rekenkundig) gemiddelde van de eerste a_n termen van het rijtje gelijk is aan a_n.

Bewijs dat er een oneindig rijtje $b_1, b_2, b_3, \ldots$ van (strikt) positieve gehele getallen bestaat, zodat voor elk centraal rijtje $a_1, a_2, a_3, \ldots$ er oneindig veel (strikt) positieve gehele getallen n zijn waarvoor geldt dat $a_n = b_n$.

Opgave 3. Laat $\triangle ABC$ een scherphoekige driehoek zijn. De punten B, D, E en C liggen op deze volgorde op een (rechte) lijn zodat $|BD| = |DE| = |EC|$. Laat M en N het midden van AD respectievelijk AE zijn. Veronderstel dat $\triangle ADE$ scherphoekig is en zij H het hoogtepunt van driehoek $\triangle ADE$. Laat P het punt op de (rechte) lijn BM zodanig dat D, H, M en P paarsgewijs verschillend zijn en op één cirkel liggen. Laat Q het punt op de (rechte) lijn CN zodat E, H, N en Q paarsgewijs verschillend zijn en op één cirkel liggen.

Bewijs dat P, Q, N en M op één cirkel liggen.

Het hoogtepunt van een driehoek is het snijpunt van zijn drie hoogtelijnen.

Tijdsduur: 4 uur en 30 minuten
Elke opgave is 7 punten waard.