EGMO 2025
European Girls' Mathematical Olympiad
KOSOVA

Language: **Danish**

Day: **1**

Søndag d. 13. april 2025

Opgave 1. For et positivt helt tal N lad $c_1 < c_2 < \cdots < c_m$ være alle positive hele tal mindre end N som er indbyrdes primiske med N. Bestem alle $N \geq 3$ så

$$\gcd(N, c_i + c_{i+1}) \neq 1$$

for alle $1 \leq i \leq m-1$.

Her er $\gcd(a,b)$ *det største positive hele tal som går op i både a og b. De hele tal a og b er indbyrdes primiske hvis* $\gcd(a,b) = 1$.

Opgave 2. En uendelig voksende følge $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$ af positive hele tal kaldes *central* hvis der for hvert positive hele tal n gælder at gennemsnittet af de første a_n led i følgen er lig med a_n.

Vis at der findes en uendelig følge b_1, b_2, b_3, ... af positive hele tal så der for enhver central følge a_1, a_2, a_3, ... gælder at der er uendeligt mange positive hele tal n hvor $a_n = b_n$.

Opgave 3. Lad ABC være en spidsvinklet trekant. Punkterne B, D, E og C ligger på en linje i denne rækkefølge og opfylder at $|BD| = |DE| = |EC|$. Lad M og N være midtpunkterne af henholdsvis AD og AE. Antag at trekant ADE er spidsvinklet, og lad H være højdernes skæringspunkt i trekant ADE. Lad P og Q være punkter på henholdsvis linjen BM og linjen CN så D, H, M og P ligger på en cirkel og er parvis forskellige, og E, H, N og Q ligger på en cirkel og er parvis forskellige. Vis at P, Q, N og M ligger på en cirkel.

Varighed: 4 timer og 30 minutter
Hver opgave giver op til 7 point