EGMO 2025
European Girls' Mathematical Olympiad
KOSOVA

Language: **Croatian**

Day: **1**

Nedjelja, 13. travnja 2025.

Zadatak 1. Za pozitivan cijeli broj N, neka su $c_1 < c_2 < \cdots < c_m$ svi pozitivni cijeli brojevi manji od N koji su relativno prosti s N. Nađi sve $N \geq 3$ takve da je

$$\gcd(N, c_i + c_{i+1}) \neq 1$$

za sve $1 \leq i \leq m - 1$.

Ovdje $\gcd(a, b)$ *označava najveći pozitivni cijeli broj koji dijeli i a i b. Cijeli brojevi a i b su relativno prosti ako je* $\gcd(a, b) = 1$.

Zadatak 2. Beskonačan rastući niz $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$ pozitivnih cijelih brojeva zovemo *centralan* ako je za svaki pozitivan cijeli broj n, aritmetička sredina prvih a_n članova niza jednaka a_n.

Dokaži da postoji beskonačni niz $b_1, b_2, b_3, \ldots$ pozitivnih cijelih brojeva takav da za svaki centralan niz $a_1, a_2, a_3, \ldots$, postoji beskonačno mnogo pozitivnih cijelih brojeva n za koje je $a_n = b_n$.

Zadatak 3. Neka je ABC šiljastokutan trokut. Točke B, D, E i C leže na pravcu tim redom i zadovoljavaju $|BD| = |DE| = |EC|$. Neka su M i N polovišta od $\overline{AD}$ i $\overline{AE}$, redom. Neka je trokut ADE šiljastokutan s ortocentrom H. Neka su P i Q točke na pravcima BM i CN, redom, tako da su D, H, M i P konciklične i međusobno različite, te da su E, H, N i Q konciklične i međusobno različite. Dokaži da su P, Q, N i M konciklične.

Ortocentar trokuta je točka u kojoj se sijeku njegove visine.