EGMO 2025
European Girls' Mathematical Olympiad
KOSOVA

Language: **Chinese (Traditional)**

Day: **1**

2025 年 4 月 13 日星期日

問題 1. 對於正整數 N，設 $c_1 < c_2 < \cdots < c_m$ 為所有小於 N 並與 N 互質的正整數。找到所有滿足下列條件的 $N \geq 3$: 對於所有 $1 \leq i \leq m-1$ 都有

$$\gcd(N, c_i + c_{i+1}) \neq 1.$$

其中 $\gcd(a, b)$ 定義爲能夠同時整除 a 和 b 的最大正整數。而當 $\gcd(a, b) = 1$ 時，則稱整數 a 和 b 互質。

問題 2. 對於一個無窮遞增的正整數列 $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$，如果對於每個正整數 n，該數列的前 a_n 項的算術平均數恰等於 a_n 的值，則我們稱這個數列是中立的。

證明存在一個無窮正整數列 $b_1, b_2, b_3, \ldots$，使得對於每一個中立數列 $a_1, a_2, a_3, \ldots$，都存在無窮多個正整數 n 滿足 $a_n = b_n$。

問題 3. 設 ABC 為銳角三角形。點 B, D, E, C 依序落在一條直線上且滿足 $BD = DE = EC$。設 M 和 N 分別為 AD 和 AE 的中點。假設 ADE 為銳角三角形且令 H 為其垂心。設 P 和 Q 分別落在直線 BM 和 CN 上，使得 D, H, M, P 兩兩相異且四點共圓，以及 E, H, N, Q 兩兩相異且四點共圓。證明 P, Q, N, M 共圓。

三角形的垂心指的是其三條高的交點。

Language: Traditional Chinese

時間: 4 小時 30 分鐘

每題 7 分