EGMO 2025
European Girls' Mathematical Olympiad
KOSOVA

Language: **Bulgarian**

Day: **1**

Неделя, Април 13, 2025

Задача 1. За всяко естествено число N с $c_1 < c_2 < \cdots < c_m$ ще означаваме всички естествени числа, по-малки от N и взаимно прости с N. Намерете всички $N \geq 3$, за които:

$$\text{НОД}(N, c_i + c_{i+1}) \neq 1$$

за всяко $1 \leq i \leq m - 1$.

Задача 2. Безкрайна растяща редица $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$ от естествени числа ще наричаме *централна*, ако за всяко естествено n средноаритметичната стойност на първите a_n члена на редицата е равна на a_n.

Докажете, че съществува безкрайна редица b_1, b_2, b_3, …, от естествени числа, такава че за всяка централна редица a_1, a_2, a_3, …, има безброй много естествени числа n със свойството $a_n = b_n$.

Задача 3. Даден е остроъгълен триъгълник ABC. Точките B, D, E и C лежат на една права в този ред и удовлетворяват равенствата $BD = DE = EC$. Нека M и N са съответно средите на AD и AE. Нека H е ортоцентър на остроъгълния триъгълник ADE. Нека точките P и Q са съответно от правите BM и CN, такива че точките D, H, M и P са различни и лежат на една окръжност и точките E, H, N и Q са различни и лежат на една окръжност. Докажете, че P, Q, N и M също лежат на една окръжност.

Language: Български

Време за работа: 4 часа 30 минути
Всяка задача се оценява със 7 точки