Language: **Bosnian**

Day: **1**

*nedjelja, april 13., 2025.*

**Zadatak 1.** Za prirodan broj $N$, neka su $c_1 < c_2 < \cdots < c_m$ svi prirodni brojevi manji od $N$ koji su relativno prosti sa $N$. Odrediti sve $N \geq 3$ za koje vrijedi

$$\mathrm{NZD}(N, c_i + c_{i+1}) \neq 1$$

za sve $1 \leq i \leq m-1$.

*Ovdje je NZD$(a,b)$ najveći prirodan broj koji dijeli oba broja $a$ i $b$. Prirodni brojevi $a$ i $b$ su relativno prosti ako vrijedi NZD$(a,b) = 1$.*

**Zadatak 2.** Beskonačni rastući niz $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$ prirodnih brojeva nazivamo *centralnim* ako za svaki prirodan broj $n$ vrijedi da je aritmetička sredina prvih $a_n$ članova ovog niza jednaka $a_n$.

Dokazati da postoji beskonačni niz $b_1$, $b_2$, $b_3$, $\ldots$ prirodnih brojeva takav da za svaki centralni niz $a_1$, $a_2$, $a_3$, $\ldots$, postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva $n$ za koje vrijedi $a_n = b_n$.

**Zadatak 3.** Neka je $ABC$ oštrougli trougao. Tačke $B$, $D$, $E$ i $C$ leže na istoj pravoj, u tom poretku, tako da vrijedi $BD = DE = EC$. Neka su $M$ i $N$ sredine duži $AD$ i $AE$, redom. Pretpostavimo da je trougao $ADE$ oštrougli i neka je $H$ ortocentar tog trougla. Neka su $P$ i $Q$ tačke na pravima $BM$ i $CN$, redom, tako da su tačke $D$, $H$, $M$ i $P$ konciklične i po parovima različite i da su tačke $E$, $H$, $N$ i $Q$ konciklične i po parovima različite. Dokazati da su tačke $P$, $Q$, $N$ i $M$ konciklične.

*Ortocentar trougla je tačka presjeka visina tog trougla.*



Vrijeme: 4 sata i 30 minuta
Svaki zadatak vrijedi 7 bodova