EGMO 2025
European Girls' Mathematical Olympiad
KOSOVA

Language: **Armenian**

Day: **1**

Կիրակի, Ապրիլի 13, 2025

Խնդիր 1. Դիցուք N-ը բնական թիվ է, իսկ $c_1 < c_2 < \cdots < c_m$ թվերը N-ից փոքր և N-ի հետ փոխադարձաբար պարզ բոլոր թվերն են: Գտնել բոլոր $N \geq 3$ բնական թվերն այնպես, որ

$$\gcd(N, c_i + c_{i+1}) \neq 1$$

$1 \leq i \leq m-1$ բոլոր թվերի համար:

$gcd(a,b)$-ն հանդիսանում է ամենամեծ բնական թիվը, որի վրա բաժանվում են և՛ a-ն, և՛ b-ն: a և b բնական թվերը կոչվում են փոխադարձաբար պարզ, եթե $gcd(a,b) = 1$:

Խնդիր 2. $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$ բնական թվերից կազմված անվերջ, աճող հաջորդականությունը կանվանենք *կենտրոնական*, եթե ցանկացած n բնական թվի համար, հաջորդականության առաջին a_n անդամների միջին թվաբանականը հավասար է a_n-ի:

Ապացուցել, որ գոյություն ունի $b_1, b_2, b_3, \ldots$ բնական թվերի անվերջ հաջորդականություն այնպես, որ ցանկացած $a_1, a_2, a_3, \ldots$ կենտրոնական հաջորդականության համար գոյություն ունեն անվերջ քանակությամբ n բնական թվեր այնպես, որ $a_n = b_n$:

Խնդիր 3. Դիցուք ABC-ն սուրանկյուն եռանկյուն է: B, D, E և C կետերը նշված հերթականությամբ գտնվում են մի ուղղի վրա այնպես, որ $BD = DE = EC$: Դիցուք M և N կետերը համապատասխանաբար AD և AE հատվածների միջնակետերն են: Ենթադրենք՝ ADE-ն սուրանկյուն եռանկյուն է, իսկ H-ը ADE եռանկյան օրթոկենտրոնն է: P և Q կետերը գտնվում են համապատասխանաբար BM և CN ուղիղների վրա այնպես, որ D, H, M, P կետերն իրարից տարբեր են և գտնվում են մի շրջանագծի վրա, և E, H, N, Q կետերն իրարից տարբեր են և գտնվում են մի շրջանագծի վրա: Ապացուցել, որ P, Q, N, M կետերով անցնում է շրջանագիծ:

Օրթոկենտրոնը եռանկյան բարձրությունների հատման կետն է:

Տևողությունը՝ 4 ժամ և 30 րոպե
Յուրաքանչյուր խնդիր գնահատվում է 7 միավոր