EGMO 2025
European Girls' Mathematical Olympiad
KOSOVA

Language: **Arabic**

Day: **1**

Sunday, April 13, 2025

المسألة 1. لكل عدد صحيح موجب N، نعتبر $c_1 < c_2 < \cdots < c_m$ جميع الأعداد الصحيحة الموجبة الأصغر من N والأولية نسبيًا مع N. أوجد جميع الأعداد $N \geq 3$ بحيث يكون

$$gcd(N, c_i + c_{i+1}) \neq 1$$

لجميع القيم $1 \leq i \leq m-1$.

هنا، $gcd(a, b)$ هو أكبر عدد صحيح موجب يقسم كلاً من a و b. يكون العددان الصحيحان a و b أوّليين نسبيًا إذا كان $gcd(a, b) = 1$.

المسألة 2. يقال للمتتابعة المتزايدة اللانهائية $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$ من الأعداد الصحيحة الموجبة أنها *متتابعة مركزية* إذا كان المتوسط الحسابي لأول a_n حد من حدودها يساوي a_n، لكل عدد صحيح موجب n.
بيّن وجود متتابعة لا نهائية $b_1, b_2, b_3, \ldots$ من الأعداد الصحيحة الموجبة، بحيث لكل متتابعة مركزية $a_1, a_2, a_3, \ldots$ يوجد عدد لا نهائي من الأعداد n بحيث يكون $a_n = b_n$.

المسألة 3. ليكن ABC مثلثًا حاد الزوايا. تقع النقاط B, D, E, C على مستقيم بهذا الترتيب وتحقق المعادلة $BD = DE = EC$. لتكن M و N منتصفَي AD و AE تواليًا. افترض أن المثلث ADE حاد الزوايا، ولتكن H نقطة تقاطع ارتفاعاته. لتكن P و Q نقطتين على المستقيمين BM و CN تواليًا، بحيث تكون D, H, M, P على دائرة واحدة (الأربع نقاط مختلفة)، وأيضًا E, H, N, Q على دائرة واحدة (الأربع نقاط مختلفة). أثبت أن P, Q, N, M على دائرة واحدة.