E diel, 13 Prill, 2025

Detyrë 1. Për një numër të plotë pozitiv N, le të jenë $c_1 < c_2 < \cdots < c_m$ të gjithë numrat e plotë pozitivë më të vegjël se N të cilët janë relativisht të thjeshtë me N. Gjeni të gjitha $N \geq 3$ të tilla që

$$\operatorname{pmmp}(N, c_i + c_{i+1}) \neq 1$$

për çdo $1 \leq i \leq m-1$.

Këtu $\operatorname{pmmp}(a,b)$ *është numri më i madhë i plotë pozitiv i cili pjesëton të dy numrat a dhe b. Numrat e plotë a dhe b janë relativisht të thjeshtë nëse* $\operatorname{pmmp}(a,b) = 1$.

Detyrë 2. Një varg i pafundëm rritës $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$ i numrave të plotë pozitivë quhet *qendror* nëse për çdo numër të plotë pozitiv n, mesi aritmetik i a_n termave të parë të vargut është i barabartë me a_n.

Tregoni që ekziston një varg i pafundëm b_1, b_2, b_3, $\ldots$ i numrave të plotë pozitivë, i tillë që për çdo varg qendror a_1, a_2, a_3, $\ldots$, ka pafund numra të plotë pozitivë n me $a_n = b_n$.

Detyrë 3. Le të jetë ABC një trekëndësh këndngushtë. Pikat B, D, E dhe C gjenden në një drejtëz në këtë renditje ashtu që $BD = DE = EC$. Le të jenë M dhe N pikat e mesit të AD dhe AE, respektivisht. Supozojmë që trekëndëshi ADE është këndngushtë dhe le të jetë H ortoqendra e tij. Le të jenë P dhe Q pika në drejtëzat BM dhe CN, respektivisht, ashtu që D, H, M dhe P i takojnë të njejtit rreth dhe janë të gjitha pika të ndryshme prej njëra-tjetrës dhe E, H, N dhe Q i takojnë të njejtit rreth dhe janë të gjitha pika të ndryshme prej njëra-tjetrës. Vërtetoni që P, Q, N dhe M i takojnë një rrethi.

Ortoqendra e një trekëndëshi është pika e prerjes e lartësive të tij.

Koha e lejuar: 4 orë dhe 30 minuta
Secila detyrë vlen 7 pikë