EGMO 2025
European Girls' Mathematical Olympiad
KOSOVA

Language: **Albanian**

Day: **1**

E diel, 13 Prill, 2025

Problemi 1. Për një numër të plotë pozitiv N, shënojmë me $c_1 < c_2 < \cdots < c_m$ të gjithë numrat e plotë pozitivë më të vegjël se N të cilët janë të thjeshtë me N. Gjeni të gjithë numrat $N \geq 3$ të tillë që

$$\mathrm{pmp}(N, c_i + c_{i+1}) \neq 1$$

për çdo $1 \leq i \leq m - 1$.

Me $\mathrm{pmp}(a, b)$ *shënohet numri i plotë pozitiv më i madh që plotpjeston njëkohësisht* a *dhe* b*. Numrat e plotë* a *dhe* b *janë të thjeshtë midis tyre në qoftë se* $\mathrm{pmp}(a, b) = 1$.

Problemi 2. Një varg i pafundëm rritës $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$ numrash të plotë pozitivë quhet *qendror* në qoftë se për çdo numër të plotë pozitiv n, mesatarja aritmetike e a_n termave të parë të vargut është e barabartë me a_n.

Tregoni se gjendet një varg i pafundëm b_1, b_2, b_3, $\ldots$ numrash të plotë pozitivë të tillë që për çdo varg qendror a_1, a_2, a_3, $\ldots$, gjenden një numër i pafundëm numrash të plotë pozitivë n që plotësojnë kushtin $a_n = b_n$.

Problemi 3. Le të jetë ABC një trekëndësh këndngushtë. Pikat B, D, E dhe C ndodhen në një drejtëz në renditjen e dhënë dhe kënaqin kushtin $BD = DE = EC$. Pikat M dhe N janë meset e AD dhe AE, respektivisht. Supozohet se trekëndëshi ADE është këndngushtë dhe ortoqendra e tij shënohet me H. Pikat P dhe Q ndodhen në drejtëzat BM dhe CN, respektivisht, në mënyrë të tillë që D, H, M dhe P ndodhen në të njëjtin rreth dhe janë çdo dy të ndryshme nga njëra-tjetra si dhe pikat E, H, N dhe Q ndodhen në të njëjtin rreth dhe janë çdo dy të ndryshme nga njëra-tjetra. Vërtetoni se P, Q, N dhe M ndodhen në të njëjtin rreth.

Ortoqendra e trekëndëshit është pika e prerjes së lartësive të tij.

Koha e lejuar: 4 orë 30 minuta
Secili problem vlen 7 pikë